

INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014



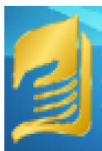
FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

## IX. OSZTÁLY

1. Az  $A, B, C$ -vel jelölt dobozokban 100 golyó van. Határozd meg az egyes dobozokban levő golyók számát tudva, hogy a  $B$  dobozban levő golyók száma 4-gyel különbözik az  $A$  dobozban levő golyók számától, a  $C$  dobozban levő golyók száma 3-mal különbözik az  $A$  dobozban levő golyók számától és egyetlen dobozban levő golyók száma sem osztható 3-mal.
2. Az  $ABC$  háromszögben  $D \in (BC)$ ,  $E \in (AB)$  és  $F \in (CE)$  úgy, hogy  $BD = 2DC$ ,  $AE = EB$  és  $CF = FE$ .
  - a) Igazold, hogy  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$  és  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ;
  - b) Igazold, hogy az  $A, F, D$  pontok kollineárisak és határozd meg az  $\frac{AF}{FD}$  arány értékét!
3. Legyen  $P$  az összes, nem állandó tagú  $(a_n)_{n \geq 1}$  számtani haladványok halmaza, amelyeknek minden tagja természetes szám és  $a_1 = 4$ .
  - a) Igazold, hogy a  $P$  halmaz minden haladványának állandó különbsége nullától különböző természetes szám;
  - b) Határozd meg a  $P$  halmazból annak a haladványnak az állandó különbségét, amelyben az  $a_{20} \cdot a_{14}$  szorzat értéke a legkisebb;
  - c) A  $P$  halmazban levő haladványok közül hánynak tagja a 2014?
4. Az  $ax^2 + bx + c = 0$  egyenletet "tökéletes"-nek nevezzük, ha  $a, b, c$  nullától különböző valós számok és az egyenlet  $a, b, c$  együtthatóit akármilyen sorrendben téve, a kapott egyenleteknek van egy közös valós gyöke.
  - a) Igazold, hogy az  $x^2 - 2014x + 2013 = 0$  egyenlet tökéletes;
  - b) Igazold, hogy a  $2013x^2 + 2014x + 1 = 0$  egyenlet nem tökéletes;
  - c) Milyen feltételt kell teljesítenie az  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  számoknak ahhoz, hogy az  $ax^2 + bx + c = 0$  egyenlet tökéletes legyen?

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014



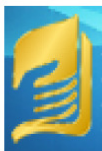
FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

## X. OSZTÁLY

- Adott a  $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$  komplex szám.
  - Igazold, hogy  $z^2 - z + 1 = 0$  és  $z^3 + 1 = 0$ ;
  - Igazold, hogy a  $z^{2014} + z$  valós szám;
  - Igazold, hogy az  $(1+z)(1-z^2)(1-z^{2014})(1+z^{2015})$  természetes szám és négyzetszám.
- Tekintsünk 2013 súlyt, amelyeknek a tömegét rendre az 1g, 2g, ..., 2013g -vel feliratozták.
  - Az 1g, 2g, ..., 9g súlyokból képezz három egyforma tömegű halmocskát;
  - Igazold, hogy bármely 6 olyan súlyból, amelyeknek tömege  $m, m+1, m+2, m+3, m+4, m+5$  képezhető három egyforma tömegű halmocská;
  - Igazold, hogy a 2013 súlyból képezhető három egyforma tömegű halom;
  - Az 1g, 2g, ..., 2014g tömegű, 2014 súlyból képezhető-e három egyforma tömegű halom? Indokold a válaszodat!
- Tekintsük az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2013-x, & x \in \mathbb{Q} \\ 2014-x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  függvényt.
  - Számítsd ki  $f(2014) + f(2013 - \sqrt{2014})$ ;
  - Oldd meg  $\mathbb{R}$ -ben az  $f(x) = 2014$  egyenletet;
  - Igazold, hogy az  $(f \circ f)(x) = x$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$
  - Igazold, hogy  $f$  invertálható és határozd meg az inverzét!
- Igazold, hogy az  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ , bármely  $a, b \in \mathbb{R}$  számok esetén!
  - Egy csiga az  $(xOy)$  koordináta rendszer első negyedében az  $y = 2^{\frac{1}{\log_2 x}}$ ,  $x \in (1; +\infty)$  egyenletű görbe grafikonján mozog.
    - Igazold, hogy az  $y > 1$  és  $(\log_2 y) \cdot (\log_2 x) = 1$ ;
    - Igazold, hogy  $x \cdot y \geq 4$ ;
    - Határozd meg a csiga legkisebb távolságát a koordináta rendszer  $O$  kezdőpontjától!

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

## XI. OSZTÁLY

1. Adottak az  $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  mátrixok.

a) Igazold, hogy  $C$  invertálható, majd határozd meg a  $C^{-1}$  inverz mátrixot és ellenőrizd az  $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$  egyenlőséget;

b) Igazold, hogy  $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ , bármely  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén;

c) Számítsd ki  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2. Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq -2$ . Határozd meg az  $a$  és  $b$  számokat úgy, hogy  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + a} - b}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{16}$ .

3. Adottak az  $a > 0$ ,  $b \in (0; 1)$  számok és az  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ha } x \in [0; b] \\ a \cdot x^4, & \text{ha } x \in (b; 1] \end{cases}$  függvény.

a) Igazold, hogy az  $f$ -nek akkor és csak akkor van határértéke a  $x = b$  pontban, ha  $a \cdot b = 1$ ;

b) Számítsd ki az  $L_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$  és  $L_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$  határértékeket.

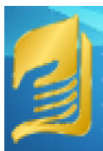
4. Tekintsük a másodrendű, valós számokat tartalmazó négyzetes mátrixok  $M_2(\mathbb{R})$  halmazát.

a) Igazold, hogy  $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$ , bármely  $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$  esetén;

b) Ha  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  akkor vagy  $\det(A + B) \geq \det A + \det B$  vagy  $\det(A - B) \geq \det A + \det B$ ;

c) András bizonyítani akarja, hogy az  $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$  tetszőlegesen kiválasztott mátrixok esetén megválaszthatja a  $+$  vagy  $-$  jeleket úgy, hogy  $\det(A \pm B \pm C) \geq \det A + \det B + \det C$ . Ellenőrizd,

hogy ez lehetséges-e! Ha igen, akkor az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  és  $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$  mátrixok esetén határozd meg hogyan kell Andrásnak megválasztania a  $+$  és  $-$  jeleket!



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

## XII. OSZTÁLY

1. Tekintsük a  $(\mathbb{Z}_{2014}; +; \cdot)$  gyűrűt.
  - a) Igazold, hogy  $\widehat{53}$  nem invertálható;
  - b) Igazold, hogy  $\widehat{2011}$  invertálható és inverze  $\widehat{671}$ ;
  - c) Oldd meg a  $\mathbb{Z}_{2014}$  gyűrűben a  $\widehat{3} \cdot x + \widehat{2010} = \widehat{1}$  egyenletet!

2. Adott az  $f: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2e^x}, & x \in [-1; 0] \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x \in (0; 3] \end{cases}$  függvény.

- a) Igazold, hogy az  $f$  függvénynek van primitív függvénye;
- b) Igazold, hogy az  $F: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^x}, & x \in [-1; 0] \\ 2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{1+x}) + 2\ln 2 - 2, & x \in (0; 3] \end{cases}$

olyan primitív függvénye az  $f$ -nek, amelynek az  $x=0$  zérushelye;

c) Számítsd ki  $\int_{-1}^3 f(x) dx$

3. A  $\mathbb{Z}$  halmazon értelmezzük az  $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$  műveletet.
  - a) Igazold, hogy a  $\circ$  művelet kommutatív, asszociatív és van semleges eleme;
  - b) Határozd meg a  $(\mathbb{Z}; \circ)$  invertálható elemeit;
  - c) Az  $0, 1, 2, \dots, 24$  számok fel vannak írva a táblára. Az osztály 24 tanulója rendre kimegy a táblához, kiválaszt 2 számot ezek közül, majd letörli ezeket és felírja ezeknek a  $\circ$  művelet szerinti összetettjét. Határozd meg melyik számot írja fel a táblára az a tanuló, aki utolsónak megy ki a táblához!

4. Adott az  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- a) Számítsd ki  $I_1$ ;
- b) Igazold, hogy  $(n+1)I_n + I_{n+1} = e$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ ;
- c) Igazold, hogy az  $I_n$  racionális szám, ha  $n=1$ .

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.