INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

IX. OSZTÁLY

1. Az A, B, C-vel jelölt dobozokban 100 golyó van. Határozd meg az egyes dobozokban levő golyók számát tudva, hogy a B dobozban levő golyók száma 4-gyel különbözik az A dobozban levő golyók számától, a C dobozban levő golyók száma 3-mal különbözik az A dobozban levő golyók számától és egyetlen dobozban levő golyók száma sem osztható 3-mal.

2. Az ABC háromszögben $D\in(BC)$, $E\in(AB)$ és $F\in(CE)$ úgy, hogy $BD=2DC$, $AE=EB$ és $CF=FE$.
   a) Igazold, hogy $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;
   b) Igazold, hogy az A, F, D pontok kollineárisak és határozd meg az $\frac{AF}{FD}$ arány értékét!

3. Legyen P az összes, nem állandó tagú $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladványok halmaza, amelyeknek minden tagja természetes szám és $a_1=4$.
   a) Igazold, hogy a P halmaz minden haladványának állandó különbsége nullától különböző természetes szám;
   b) Határozd meg a P halmazból annak a haladványnak az állandó különbségét, amelyben az $a_{20}\cdot a_{14}$ szorzat értéke a legkisebb;
   c) A P halmazban levő haladványok közül hánynak tagja a 2014?

4. Az $ax^2+bx+c=0$ egyenletet "tökéletes"-nek nevezzük, ha a, b, c nullától különböző valós számok és az egyenlet a, b, c együtthatóit akármilyen sorrendben téve, a kapott egyenleteknek van egy közös valós gyöke.
   a) Igazold, hogy az $x^2-2014x+2013=0$ egyenlet tökéletes;
   b) Igazold, hogy a $2013x^2+2014x+1=0$ egyenlet nem tökéletes;
   c) Milyen feltételt kell teljesítenie az $a, b, c\in\mathbb{R}^*$ számoknak ahhoz, hogy az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet tökéletes legyen?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ

8 martie 2014

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

X. OSZTÁLY

1. Adott a $z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ komplex szám.

   a) Igazold, hogy $z^2-z+1=0$ és $z^3+1=0$;
   b) Igazold, hogy a $z^{2014}+z$ valós szám;
   c) Igazold, hogy az $(1+z)\left(1-z^2\right)\left(1-z^{2014}\right)\left(1+z^{2015}\right)$ temészetes szám és négyzetszám.

2. Tekintsünk 2013 súlyt, amelyeknek a tömegét rendre az 1g, 2g, ..., 2013g -vel feliratozták.
   a) Az 1g, 2g, ..., 9g súlyokból képezz három egyforma tömegű halmocskát;
   b) Igazold, hogy bármely 6 olyan súlyból, amelyeknek tömege m, m+1, m+2, m+3, m+4, m+5 képezhető három egyforma tömegű halmocska;
   c) Igazold, hogy a 2013 súlyból képezhető három egyforma tömegű halom;
   d) Az 1g, 2g, ..., 2014g tömegű, 2014 súlyból képezhető-e három egyforma tömegű halom? Indokold a válaszodat!

3. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2013-x, x\in\mathbb{Q}\\ 2014-x, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ függvényt.
   a) Számítsd ki $f(2014)+f\left(2013-\sqrt{2014}\right)$;
   b) Oldd meg $\mathbb{R}$-ben az $f(x)=2014$ egyenletet;
   c) Igazold, hogy az $(f\circ f)(x)=x,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$
   d) Igazold, hogy f invertálható és határozd meg az inverzét!

4. 4.1 Igazold, hogy az $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$, bármely $a, b\in\mathbb{R}$ számok esetén!

   4.2 Egy csiga az (xOy) koordináta rendszer első negyedében az $y=2^{\frac{1}{\log_2 x}}$, $x\in(1;+\infty)$ egyenletű görbe grafikonján mozog.
   a) Igazold, hogy az $y>1$ és $(\log_2 y)\cdot(\log_2 x)=1$;
   b) Igazold, hogy $x\cdot y\ge 4$;
   c) Határozd meg a csiga legkisebb távolságát a koordináta rendszer O kezdőpontjától!

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecția mediului

XI. OSZTÁLY

1. Adottak az $A=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ mátrixok.

a) Igazold, hogy C invertálható, majd határozd meg a C^{-1} inverz mátrixot és ellenőrizd az $A=C^{-1}\cdot B\cdot C$ egyenlőséget;

b) Igazold, hogy $B^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén;

c) Számítsd ki A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $a\geq -2$. Határozd meg az a és b számokat úgy, hogy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+a}-b}{x^2+2x-3}=\dfrac{3}{16}$.

3. Adottak az $a>0$, $b\in(0;1)$ számok és az $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{ha } x\in[0;b]\\ a\cdot x^4, & \text{ha } x\in(b;1]\end{cases}$ függvény.

a) Igazold, hogy az f-nek akkor és csak akkor van határértéke a $x=b$ pontban, ha $a\cdot b=1$;

b) Számítsd ki az $L_1=\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$ és $L_2=\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$ határértékeket.

4. Tekintsük a másodrendű, valós számokat tartalmazó négyzetes mátrixok $M_2(\mathbb{R})$ halmazát.

a) Igazold, hogy $\det(X+Y)+\det(X-Y)=2(\det X+\det Y)$, bármely $X, Y\in M_2(\mathbb{R})$ esetén;

b) Ha $A, B\in M_2(\mathbb{R})$ akkor vagy $\det(A+B)\geq\det A+\det B$ vagy $\det(A-B)\geq\det A+\det B$;

c) András bizoyítani akarja, hogy az $A,B,C\in M_2(\mathbb{R})$ tetszőlegesen kiválasztott mátrixok esetén megválaszthatja a $+$ vagy $-$ jeleket úgy, hogy $\det(A\pm B\pm C)\geq\det A+\det B+\det C$. Ellenőrizd, hogy ez lehetséges-e! Ha igen, akkor az $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ és $C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -5\end{pmatrix}$ mátrixok esetén határozd meg hogyan kell Andrásnak megválasztania a $+$ és $-$ jeleket!

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

XII. OSZTÁLY

1. Tekintsük a $(\mathbb{Z}_{2014};+;\cdot)$ gyűrűt.

a) Igazold, hogy $\widehat{53}$ nem invertálható;

b) Igazold, hogy $\widehat{2011}$ invertálható és inverze $\widehat{671}$;

c) Oldd meg a $\mathbb{Z}_{2014}$ gyűrűben a $\hat{3}\cdot x+\widehat{2010}=\hat{1}$ egyenletet!

2. Adott az $f:[-1;3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2e^x}, & x\in[-1;\,0]\\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x\in(0;\,3]\end{cases}$ függvény.

a) Igazold, hogy az f függvénynek van primitív függvénye;

b) Igazold, hogy az $F:[-1;3]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e^x}, & x\in[-1;\,0]\\ 2\sqrt{x+1}-2\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)+2\ln 2-2, & x\in(0;\,3]\end{cases}$

olyan primitív függvénye az f-nek, amelynek az $x=0$ zérushelye;

c) Számítsd ki $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

3. A $\mathbb{Z}$ halmazon értelmezzük az $x\circ y=xy-5x-5y+30$ műveletet.

a) Igazold, hogy a $\circ$ művelet kommutatív, asszociatív és van semleges eleme;

b) Határozd meg a $(\mathbb{Z};\circ)$ invertálható elemeit;

c) Az $0, 1, 2, ..., 24$ számok fel vannak írva a táblára. Az osztály 24 tanulója rendre kimegy a táblához, kiválaszt 2 számot ezek közül, majd letörli ezeket és felírja ezeknek a $\circ$ művelet szerinti összetettjét. Határozd meg melyik számot írja fel a táblára az a tanuló, aki utolsónak megy ki a táblához!

4. Adott az $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

a) Számítsd ki I_1;

b) Igazold, hogy $(n+1)I_n+I_{n+1}=e,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*$;

c) Igazold, hogy az I_n racionális szám, ha $n=1$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*